Tentamen Quantum Fysica II
30 juni 1998, 14.00 u

Iedere opgave op een apart vel.
Naam, adres, studentnummer etc. op ieder vel.

Opgave 1. *(Voor deze opgave zal het cijfer van de toets gebruikt worden indien dit hoger is.)*

Een deeltje beweegt in een sferisch symmetrische potentiaal. Zijn golffunctie heeft de vorm:

$\Phi(x,y,z) = C(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2) f(|\vec{r}|)$ (~~á,â,ã~~ constanten; C normering)
α β γ

Neem ~~á = â = ä~~ = 1.
α β γ

a) Welke waarden van $\vec{L}^2, L_x, L_y, L_z$ kunnen bij meting gevonden worden en wat is de waarschijnlijkheid voor elk van deze waarden?

Neem nu $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = 1$.

b) Schrijf de operator L_z met behulp van poolcoordinatoren in de vorm:

$$L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

c) Welke waarden van L_z kunnen bij meting gevonden worden en wat is de waarschijlijkheid voor elk van deze waarden?

e) Welke waarden van $\vec{L}^2$ kunnen bij meting gevonden worden en wat is de waarschijlijkheid voor elk van deze waarden?

d) Welke waarden van L_x kunnen bij meting gevonden worden en wat is de waarschijlijkheid voor elk van deze waarden? Gebruik:

$$Y_{0,0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

$$Y_{2,2}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} e^{2i\varphi} \sin^2\theta$$

$$Y_{2,1}(\theta,\varphi) = -\sqrt{\frac{5}{8\pi}} e^{i\varphi} \sin\theta\cos\theta$$

$$Y_{2.0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\theta - 1)$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} d\varphi \sin\theta \, d\theta \, Y^*_{\lambda' m'}(\theta,\varphi) Y_{\lambda m}(\theta,\varphi) = \delta_{l,l'}\delta_{m,m'}$$

Iedere opgave op een apart vel.
Naam, adres, studentnummer etc. op ieder vel.

Opgave 2.

Beschouw de Hamiltoniaan $H = H_0 + H_1$ waarbij H_1 als storing opgevat kan worden. De eigenwaarden en eigentoestanden van H_0 zijn: $E_n^{(0)}$ en $|n>$ respectievelijk.

a) Leid af dat in eerste-orde storingsrekening, de energie van de grondtoestand van H gegeven wordt door de uitdrukking

$$\begin{cases} E_0 = E_0^{(0)} + E_0^{(1)} \\ E_0^{(1)} = <0|H_1|0> \end{cases}$$

b) We nemen nu

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad \text{en} \quad H_1 = Cx^4$$

Bepaal E_0.

c) Beredeneer op grond van pariteit dat in het geval $H_1 = Cx^3$ en H_0 onveranderd er geldt:

$$E_0^{(1)} = 0$$

Gebruik:

1)
$$<x|0> = \left[\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right]^{1/4} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right]$$

$$\left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

en genormeerd

2)
$$\int x^{2n+1} \quad \int_0^\infty x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}}$$

$$\int x^{2n} \quad \int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\frac{1.3.5.(2n-1)}{(2a)^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

opgave 3

$\vec{n}$ is en - —— - willekeurig eenvector, lood zich

a) $\vec{n} \cdot \vec{\sigma}$

Iedere opgave op een apart vel.

Naam, adres, studentnummer etc. op ieder vel.

Opgave 3.

a) $\vec{n}.\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & -n_z \end{bmatrix}$ waarbij $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ de Pauli spin - matrices voorstellen. $\vec{n}$ is een willekeurige eenheidsvector. Laat zien dat:

$(\vec{n}.\vec{\sigma})$.

b) Verifieer dat $(\vec{n}.\vec{\sigma})^2 = 1$

c) De meest algemene spin golffunctie voor een deeltje met spin = ½ħ is een superpositie van de eigenfuncties van $\hat{S}_z$ met eigenwaarden ± ½ħ. Verklaar.

d) Bepaal de twee eigenwaarden van de operator

$A = \exp(i\theta\, \vec{n}.\vec{\sigma})$

e) Bepaal de bij deze eigenwaarden behorende eigenfuncties in spinor-vorm (d.w.z. als 2-dim kolom matrix)

f) Bewijs dat A een unitaire operator is (d.w.z. $AA^+ = A^+A = I$) en geschreven kan worden als:

$A = \cos\theta\, \mathcal{I} + i\sin\theta\, (\vec{n}.\vec{\sigma})$ waarbij $\mathcal{I}$ de 2 x 2 eenheidsmatrix voorstelt.

I $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$